ANALIZA FUNKCJONALNA I TOPOLOGIA

Lista 1 - Funkcje podliniowe, półnormy i funkcjonały liniowe

1. Pokazać, że jeżeli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją podliniową, gdzie X jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$, to $p(x) = \max\{f(x), f(-x)\}$ jest półnormą.

2. Pokazać, że jeżeli $p, q : X \to \mathbb{R}$ są funkcjami podliniowymi, gdzie X jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$, to $\max\{p(x), q(x)\}$ jest też podliniowa.

3. Pokazać, że funkcja podliniowa $p : X \to \mathbb{R}$ jest półnormą wtedy i tylko wtedy gdy $p(-x) = p(x)$ dla każdego $x \in X$.

4. Pokazać, że jeżeli $p : X \to \mathbb{R}$ jest półnormą, to $p(x) \geq 0$ dla każdego $x \in X$.

5. Pokazać, że jeżeli p, q są półnormami, to

   (a) $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$ jest półnormą,

   (b) $(p \vee q)(x) = \max\{p(x), q(x)\}$ jest półnormą,

6. Pokazać, że jeżeli $X = C(\mathbb{R})$, to funkcje $p_n : X \to \mathbb{R}$ niżej zdefiniowane są półnormami na X, ale nie są normami:

$$p_n(f) = \sup_{x\in[-n,n]}|f(x)|$$

7. Niech φ będzie funkcjonałem liniowym na przestrzeni wektorowej X nad ciałem $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$. Pokazać, że

$$p_\varphi(x) = |\varphi(x)|$$

   jest półnormą na X.

8. Przy oznaczeniach z zadania poprzedniego, niech $x \in X$. Pokazać, że

$$p_x(\varphi) = |\varphi(x)|$$

   jest półnormą na przestrzeni wektorowej X' funkcjonałów liniowych na X.

9. Wyznaczyć normy funkcjonałów liniowych $\varphi \in X^*$ (rzeczywistych lub zespolonych) zadanych wzorami na podanych przestrzeniach unormowanych:

   (a) $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x_1 - x_2 + x_3$ dla $X = \ell^1$,

   (b) $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ dla $X = \ell^2$,

   (c) $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{k=1}^{n} x_k$ dla $X = \ell^p$,

   (d) $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$ dla $X = c_0$,

   (e) $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \lim_{n\to\infty} x_n$ dla $X = c$,

   (f) $\varphi(f) = \int_{-1}^{1} tf(t)dt$ dla $X = L^2[-1, 1]$.

R. Lenczewski